

تأسيس رياضيات

الأدبي، الفندقى والسىاحى

اعداد: المهندس احمد اطريح

تحتوى الدوسية على:

- ✓ العمليات الحسابية للأعداد بوجود الإشارات
- ✓ العمليات الحسابية للكسور
- ✓ الأسس والجذور
- ✓ العمليات الحسابية على المتغيرات
- ✓ حل المعادلات
- ✓ تحليل العبارات الجبرية
- ✓ الاقتوانات والتعويض المباشر فيها

المهندس

أولاً: الإشارات

ويُقصد بالإشارات (إشارة العدد سالب أو موجب)

×

أ. في حالة الضرب والقسمة

الإشارات متشابهة الناتج موجب
 الإشارات مختلفة الناتج سالب

سالب (-) × سالب (-) = موجب (+)

موجب (+) × موجب (+) = موجب (+)

سالب (-) × موجب (+) = سالب (-)

موجب (+) × سالب (-) = سالب (-)

أمثلة

← ٥ - × ٣ - = ١٥

← ٦ - × ٤ - = ٢٤

← ٢ × ٧ = ١٤

← ٣ × ٤ = ١٢

← ٢ - × ٤ = ٨ -

← ٣ - × ٥ = ١٥ -

← ٢ × ٧ - = ١٤ -

← ٤ × ٨ - = ٣٢ -

الاشارات متشابهة نجمع ونضع نفس الإشارة
 الاشارات مختلفة نطرح ونضع إشارة العدد الأكبر

٢. في حالة الجمع والطرح

أمثلة

$$\begin{array}{rcl} 8- & = & 3- - 5- \\ 6- & = & 4- - 2- \\ 8 & = & 5 + 3 \\ 9 & = & 4 + 5 \\ 6 & = & 10 + 4- \\ 7- & = & 12- - 5 \\ 4 & = & 5 - 9 = 5 - 12 + 3- \end{array}$$

انتبه

إذا كان سالب وراه سالب
 مباشرة بنحذفهم وبتصير
 الإشارة موجب

$$\begin{array}{l} \text{مثل } 7 = 3 + 4 \\ \text{مثل } 0 = 1 + 1- \end{array}$$

ثانياً: جمع وطرح الكسور

$$\frac{(أ \times د) \pm (ب \times ج)}{د \times ب} = \frac{أ}{د} \pm \frac{ب}{ج} \quad \text{قاعدة:}$$

أمثلة

$$\frac{22}{15} = \frac{12 + 10}{15} = \frac{(4 \times 3) + (5 \times 2)}{(5 \times 3)} = \frac{4}{5} + \frac{2}{3}$$

$$\frac{7}{40} = \frac{1-15}{40} = \frac{(1 \times 1) - (5 \times 3)}{(5 \times 8)} = \frac{1}{5} - \frac{3}{8} \leftarrow$$

$$1 = \frac{7}{7} = \frac{6-9}{7} = \frac{6}{7} - \frac{9}{7} \leftarrow$$

لاحظ أن المقامات متشابهة لذلك
نقوم بعملية الطرح للبسط مباشرة.

$$\frac{5}{6} = \frac{10}{12} = \frac{7+3}{12} = \frac{7}{12} + \frac{3}{12} \leftarrow$$

اختصرنا البسط والمقام بقسمة
كلاهما على العدد ٢

ثالثاً: ضرب الكسور

$$\frac{أ \times ج}{ب \times د} = \frac{ج}{د} \times \frac{أ}{ب} \text{ قاعدة:}$$

أمثلة

$$\frac{10}{21} = \frac{5}{7} \times \frac{2}{3} = \frac{5}{7} \times \frac{2}{3} \leftarrow$$

$$\frac{3}{8} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \leftarrow$$

رابعاً: قسمة الكسور

قاعدة: $\frac{أ}{ب} \div \frac{ج}{د} = \frac{أ}{ب} \times \frac{د}{ج} = \frac{أ \times د}{ب \times ج}$

أمثلة

$$\frac{٢١}{١٠} = \frac{٧ \times ٣}{٢ \times ٥} = \frac{٧}{٢} \times \frac{٣}{٥} = \frac{٢١}{١٠} \div \frac{٣}{٥}$$

$$\frac{٣٥}{٢٧} = \frac{٥ \times ٧}{٣ \times ٩} = \frac{٥}{٣} \times \frac{٧}{٩} = \frac{٣٥}{٢٧} \div \frac{٧}{٩}$$

الأساس موجب

الأساس سالب

١. الأس لعدد صحيح موجب

٢. الأس لعدد صحيح سالب

خامساً: الأسس

$أ^ن$: تُقرأ أ أس ن ، حيث أ : الأساس ، ن : الأس

ومعناها ضرب الأساس بنفسه عدد مرات الأس.

توضيح ١: $٢^٢ = ٢ \times ٢$ ضُرب الأساس ٢ بنفسه مرتين.

توضيح ٢: $٢^٣ = ٢ \times ٢ \times ٢$ ضُرب الأساس ٢ بنفسه ٣ مرات.

١. الأس لعدد صحيح موجب

(أ) الأساس موجب

أمثلة

$$1024 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 \leftarrow$$

$$81 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4 \leftarrow$$

(ب) الأساس سالب

١. الأساس سالب (الأس فردي) : الجواب يكون دائما سالب.

أمثلة

$$-8 = -2 \times -2 \times -2 = -2^3 \leftarrow$$

$$-32 = -2 \times -2 \times -2 \times -2 \times -2 = -2^5 \leftarrow$$

٢. الأساس سالب (الأس زوجي) : الجواب يكون دائما موجب.

أمثلة

$$16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4 \leftarrow$$

$$4 = 2 \times 2 = 2^2 \leftarrow$$

٢. الأس لعدد صحيح سالب

لإيجاد العدد المرفوع للأس سالب، نقوم أولاً بتحويل الأس موجب من خلال قلب البسط والمقام.

قاعدة: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ ، $a \neq \text{صفر}$

أمثلة

أي عدد مرفوع للأس واحد يُساوي نفسه.

$$2^1 = 2 ، 3^1 = 3 ، 4^1 = 4$$

أي عدد مرفوع للأس صفر يُساوي واحد.

$$2^0 = 1 ، 3^0 = 1 ، 4^0 = 1$$

$$\frac{1}{9} = \frac{1}{3^2} = 3^{-2}$$

$$\frac{1}{64} = \frac{1}{4^3} = 4^{-3}$$

سادساً: العلاقة بين الأسس والجذور

العدد	(العدد) ^١	(العدد) ^٢	(العدد) ^٣	$\sqrt[3]{(\text{العدد})}$	$\sqrt[4]{(\text{العدد})}$
١	١	١	١	١	١
٢	٢	٤	٨	٢	٢
٣	٣	٩	٢٧	٣	٣
٤	٤	١٦	٦٤	٤	٤
٥	٥	٢٥	١٢٥	٥	٥

سابعاً: جمع وطرح المتغيرات

تُجمع وتُطرح المتغيرات بشرطين اثنين هُما: ١. أن تكون المتغيرات متشابهة.

٢. أن تكون الأسس متساوية.

عندما يتحقق الشرطين السابقين فإننا نقوم بجمع وطرح المعاملات.

أمثلة

$$2s + s = 3s$$

نفس المتغيرات ونفس الأسس، حيث s في الحد الأول هي s و s في الحد الثاني أيضاً s .

لكن عندما يكون المتغير مرفوع لأس واحد فإننا لا نكتب الأس.

$$3s^2 + 4s^2 = 7s^2$$

$$2s^2 - 3s^2 = -s^2$$

$$3s^3 - 2s^3 + 5s^3 = 6s^3$$

ثامناً: ضرب وقسمة المتغيرات

نقوم بضرب وقسمة المتغيرات بشرط واحد فقط هو: أن تكون المتغيرات متشابهة.

قاعدة ١: أس^م × ب^ن = (أ × ب) أس^{م+ن}

قاعدة ٢: أس^م ÷ ب^ن = (أ ÷ ب) أس^{م-ن}

قاعدة ١ تعني أن الأسس في حالة الضرب تُجمع ، ونضرب المعاملات.
 قاعدة ٢ تعني أن الأسس في حالة القسمة تُطرح ، ونقسم المعاملات.

أمثلة

← أس^٢ × أس^١ = (١ × ٢) أس^{١+١} = أس^٢

← أس^٣ × أس^٤ = أس^{٣+٤} = أس^٧

← أس^٧ × أس^٥ = أس^{٧+٥} = أس^{١٢}

← أس^{١٠} ÷ أس^٣ = (١٠ ÷ ٣) أس^{١٠-٣} = أس^٧

← أس^{١٥} ÷ أس^٥ = (١٥ ÷ ٥) أس^{١٥-٥} = أس^{١٠}

تاسعاً: حل المعادلات ذات مجهول واحد

نقوم بوضع جميع الحدود التي تحتوي على المجهول في جهة وبقيّة الحدود في جهة أخرى.

مثال ١: حل المعادلة $3س + ١٢ = س - ٤$

الحل:

$$3س + ١٢ = س - ٤$$

$$3س - س = -٤ - ١٢$$

$$\frac{2س}{2} = \frac{-١٦}{2}$$

$$س = -٨$$

مثال ٢: حل المعادلة $٥س - ٧ = -٦س + ٤$

الحل:

$$٥س - ٧ = -٦س + ٤$$

$$٥س + ٦س = ٧ + ٤$$

$$\frac{١١س}{١١} = \frac{١١}{١١}$$

$$س = ١$$



عاشراً: تحليل العبارات الجبرية

١. تحليل حدين بإخراج العامل المشترك
٢. الفرق بين مربعين
٣. الفرق بين مكعبين أو مجموع مكعبين
٤. تحليل مقدار جبري (عبارة تربيعية) من ثلاث حدود

إشارة الحد الثابت سالبة

إشارة الحد الثابت موجبة

١. تحليل حدين بإخراج العامل المشترك

أمثلة

$$٢س^٢ + ٥س = ٥س + ٢س(س + ٥)$$

٢س^٢ هي عبارة عن ٢×س×س وإذا نظرنا للحد الذي يحتوي على ٥س نجد أن س عامل مشترك كما هو مبين بالتظليل الظاهر، ثم أخذنا العامل المشترك س مضروباً في القوس الذي وُضع فيه ناتج قسمة كلا الحدين على العامل المشترك س.

$$س - ٢س = ١ \times س - س(س - ١)$$

٢. الفرق بين مربعين

انتبه

مجموع المربعين لا يُطل.

$$أ^٢ + ب^٢$$

$$\text{قاعدة: } أ^٢ - ب^٢ = (أ - ب) (أ + ب)$$

أمثلة

$$س^٢ - ٢٥ = س^٢ - ٥^٢ = (س - ٥) (س + ٥)$$

$$٩ - س^٢ = ٣^٢ - س^٢ = (٣ - س) (٣ + س)$$

$$س^٢ - ص^٢ = (س - ص) (س + ص)$$

$$س^٢ + ٢٥ \quad \text{⚠ انتبه: مجموع مربعين، لا يُحلل.}$$

٣. الفرق بين مكعبين أو مجموع مكعبين

$$\text{قاعدة: } أ^٣ \mp ب^٣ = (أ \mp ب) (أ^٢ \pm أ ب + ب^٢)$$

موجب دائماً

عكس الإشارة

نفس الإشارة

أمثلة

$$س^٣ - ٢٧ = (س - ٣) (س^٢ + ٣ س + ٩)$$

$$\leftarrow \text{س}^3 + ٨ = (\text{س} + ٢)(\text{س}^2 - ٢\text{س} + ٤)$$

٤. تحليل مقدار جبري (عبارة تربيعية) من ثلاث حدود

إشارة الحد الثابت سالبة

يجب أن تكون العبارة التربيعية على الصورة $\text{س}^2 \pm \text{ب س} - \text{ج}$ حيث معامل س = ١ ، وإشارة الحد الثابت ج سالبة (-) ، في هذه الحالة نقوم بالتحليل بفتح قوسين ونضع بداخل كل منهما إشارات مختلفة على الشكل $(\text{س} -)(\text{س} +)$ ثم نبحث عن عددين حاصل ضربهما يساوي ج وناتج جمعهما يساوي ب وتكون إشارة العدد الأكبر فيهما هي نفس إشارة ب.

أمثلة

$$\leftarrow \text{س}^2 - ٩\text{س} - ١٠ = (\text{س} - ١٠)(\text{س} + ١)$$

الأعداد التي حاصل ضربها (١٠) هي: {٢، ٥} وأيضا {١، ١٠} لكن إذا جمعنا أو طرحنا الأعداد {٢، ٥} لا يمكن أن نحصل على ناتج يساوي معامل الحد الأوسط، لذلك فالعددين الصحيحين هما {١، ١٠} ونعطي الأكبر فيهما وهو العدد (١٠) إشارة معامل الحد الأوسط.

$$\leftarrow \text{س}^2 + ٨\text{س} - ٢٠ = (\text{س} - ٢)(\text{س} + ١٠)$$

$$\leftarrow \text{س}^2 - ٢٠\text{س} - ٤ = (\text{س} - ٥)(\text{س} + ٤)$$

إشارة الحد الثابت موجبة

يجب أن تكون العبارة التربيعية على الصورة $س^٢ \pm ب س + ج$ حيث معامل س $س^٢ = ١$ ، وإشارة الحد الثابت ج موجبة (+) ، في هذه الحالة نقوم بالتحليل بفتح قوسين ونضع بداخل كل منهما إشارات متشابهة وتشبه إشارة ب على الشكل $(س +) (س +)$ أو على الشكل $(س -) (س -)$ ثم نبحث عن عددين حاصل ضربيهما يساوي ج وناتج جمعهما يساوي ب .

أمثلة

$$\begin{aligned} س^٢ - ٧ س + ١٠ &= (س - ٥) (س - ٢) \\ س^٢ + ١١ س + ١٠ &= (س + ١) (س + ١٠) \\ س^٢ - ٨ س + ١٢ &= (س - ٦) (س - ٢) \end{aligned}$$

الحادي عشر: حل المعادلات التربيعية

بعد أن تعلمنا طرق التحليل يمكننا إيجاد جذور (أصفار) المعادلات التربيعية من خلال التحليل أولاً ثم إيجاد قيم المجهول.

تابع الأمثلة في الصفحة التالية

أمثلة

✚ جذور (أصفار) العبارات التربيعية التالية:

✚ حل المعادلات التربيعية التالية:

← $s^2 - 25 = 0$

الخطوة الأولى نساوي العبارة التربيعية بالصفر

الخطوة الثانية نقوم بالتحليل

الخطوة الثالثة نجد الجذور، بما أن هناك قوسين حاصل ضربهما يساوي صفر فإنه إما أن يكون ما داخل القوس الأول يساوي صفر أو ما داخل القوس الثاني يساوي صفر

الحل: $s^2 - 25 = 0$

$s^2 - 25 = (s + 5)(s - 5)$

إما $s^2 - 25 = 0$ أو $s^2 - 25 = 0$
 $s = 5$ $s = -5$
 $s = 5$ $s = -5$

← $s^2 - 4s = 0$

الحل: $s^2 - 4s = 0$

$s^2 - 4s = s(s - 4)$

إما $s^2 - 4s = 0$ أو $s^2 - 4s = 0$
 $s = 4$ $s = 0$
 $s = 4$ $s = 0$

← س^٦ - س^٤ - ٢١

الحل: س^٦ - س^٤ - ٢١ = ٠

٠ = (س - ٧) (س + ٣)

إفأ س ^٦ = ٧ - س ^٤ ٧ = س ^٤	إفأ س ^٦ = ٣ + س ^٤ ٣ - = س ^٤
--	--

الثاني عشر: مفكوك (أ ± ب)^٢

قاعدة: (أ ± ب)^٢ = (أ^٢ ± (أ × ب × ٢) + ب^٢)

أمثلة

← (س + ٤)^٢ = س^٢ + ٨س + ١٦

← (س - ١)^٢ = س^٢ - ٢س + ١

← (س + هـ)^٢ = س^٢ + ٢س هـ + هـ^٢



الثالث عشر: التعويض في الإقترانات

١. الاقتران كثير الحدود

٢. الاقتران النسبي

٣. الاقتران الجذري

٤. الاقتران المتشعب

١. الاقتران كثير الحدود

الاقتران كثير الحدود هو اقتران على الصورة التالية:

$$A_n S^n \pm A_{n-1} S^{n-1} \pm A_{n-2} S^{n-2} \pm \dots \pm A_1 S \pm A_0$$

حيث: A_n : معامل S التي تحمل الدرجة n .

A_{n-1} : معامل S التي تحمل الدرجة $n-1$. وهكذا ...

n : عدد صحيح موجب .

A : عدد ثابت حقيقي .

أمثلة على كثيرات الحدود :

١. $٢٠ + س - \frac{١}{٤} س^٢ - ٣ س^٣ + ٦ س^٤ + ٢ س^٥ = (س)$

٢. $٢٠ + ٣ س^٢ + ٦ س^٤ + ٢ س^٥ = (س)$

٣. $٢١ - س^٤ - س^٦ = (س)$ ← الاقتران التربيعي

٤. $٤ + س = (س)$ ← الاقتران الخطي

٥. $١٢ = (س)$ ← الاقتران الثابت

التعويض المباشر في الاقتران كثير الحدود

مثال ١ : جد قيمة الاقتران $٢ س^٥ - ٣ س^٣ + س + ١٠$ عندما $س = ٢$.

الحل: $٢ س^٥ - ٣ س^٣ + س + ١٠$ نضع مكان كل $س$ القيمة العددية ٢

$$٢(٢)^٥ - ٣(٢)^٣ + (٢) + ١٠ = (٢)$$

$$١٠ + (٢) + ٨ - ٨ = (٢)$$

$$١٢ = (٢)$$



مثال ٢ : جد قيمة الاقتران $\sqrt{s} = (s) + s^2 - 8s - 4$ عندما $s = 3$.

الحل: $\sqrt{s} = (s) + s^2 - 8s - 4$ نضع مكان كل s القيمة العددية ٣

$$\sqrt{3} = (3) + 3^2 - 8(3) - 4$$

$$\sqrt{3} = (3) + 9 - 24 - 4$$

$$\sqrt{3} = (3) - 19$$

مثال ٣ : جد قيمة الاقتران $\sqrt{s} = (s) + \frac{7}{16} + s^2$ عندما $s = \frac{3}{4}$.

نضع مكان كل s القيمة العددية $\frac{3}{4}$

$$\sqrt{s} = (s) + \frac{7}{16} + s^2$$

$$\sqrt{\frac{3}{4}} = \left(\frac{3}{4}\right) + \frac{7}{16} + \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$\sqrt{\frac{3}{4}} = \left(\frac{3}{4}\right) + \frac{7}{16} + \frac{9}{16}$$

$$\sqrt{\frac{3}{4}} = \left(\frac{3}{4}\right) + \frac{16}{16} = \left(\frac{3}{4}\right) + 1$$

مثال ٤ : جد قيمة الاقتران $\sqrt{s} = (s) + s^2 - 6s - 1$ عندما $s = 0, 1, 2$.

$$\sqrt{s} = (s) + s^2 - 6s - 1$$

$$\sqrt{0} = (0) + 0^2 - 6(0) - 1$$

$$\sqrt{1} = (1) + 1^2 - 6(1) - 1$$

$$\sqrt{2} = (2) + 2^2 - 6(2) - 1$$



مثال ٥: جد قيمة الاقتران $\psi(s) = 12$ عندما $s = -6, 0, 1, \pi, \frac{1}{4}$

الحل: $\psi(-6) = 12$

$\psi(0) = 12$

$\psi(1) = 12$

$\psi(\pi) = 12$

$\psi(\frac{1}{4}) = 12$

مثال ٦: جد قيمة الاقتران $\psi(s) = \pi$ عندما $s = -6, 0, 1, \pi, \frac{1}{4}$

الحل: $\psi(-6) = \pi$

$\psi(0) = \pi$

$\psi(1) = \pi$

$\psi(\pi) = \pi$

$\psi(\frac{1}{4}) = \pi$

٢. الاقتران النسبي

يسمى الاقتران $\psi(s)$ اقتراناً نسبياً إذا كان يمكن كتابته على الصورة $\psi(s) = \frac{\psi(s)}{\psi(s)}$ حيث $\psi(s)$ و $\psi(s)$ اقترانان كل منهما كثير حدود، $\psi(s) \neq 0$



مثال ١ : جد قيمة الاقتران $\frac{1+s^2}{s^2+s} = (s)$ عندما $s = 0, 1, 2-$

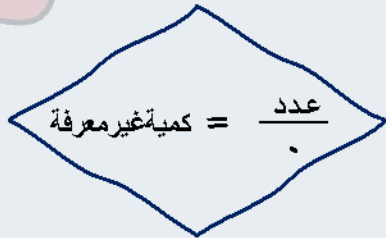
الحل: $\frac{1}{2} = \frac{1+(0) \times 2}{2+(0)}$ $\frac{1}{2} = (0)$

$1 = \frac{3}{3} = \frac{1+(1) \times 2}{2+(1)}$ $1 = (1)$

$\frac{1}{2} = \frac{3-}{6-} = \frac{1+(2-) \times 2}{2+(2-)}$ $\frac{1}{2} = (2-)$

مثال ٢ : جد قيمة الاقتران $\frac{15}{1-s} = (s)$ عندما $s = 0, 1, 2-$

الحل: $15- = \frac{15}{1-} = \frac{15}{1-(0)}$ $15- = (0)$



$15 = \frac{15}{1-(1)}$ $15 = (1)$

$5- = \frac{15}{3-} = \frac{15}{1-(2-)}$ $5- = (2-)$

٣. الاقتران الجذري

هو اقتران يُكتب على الصورة $\sqrt{s} = f(s)$

مثال : جد قيمة الاقتران $\sqrt{s+5} = f(s)$ عندما $s = 6, 0$

الحل: $\sqrt{s+5} = f(s) \Rightarrow \sqrt{6+5} = f(6) \Rightarrow \sqrt{11} = f(6)$

$\sqrt{s+5} = f(s) \Rightarrow \sqrt{0+5} = f(0) \Rightarrow \sqrt{5} = f(0)$

٤. الاقتران المتشعب

هو اقتران يحتوي على أكثر من قاعدة ضمن فترات محددة على الصورة التالية:

$$\left. \begin{array}{l} f(s), s \leq a \\ g(s), s > a \end{array} \right\} = f(s)$$



$$\left. \begin{array}{l} s^2, s > 3 \\ s^2 + 1, s \leq 3 \end{array} \right\} = (s) \text{ مثال : جد قيمة الاقتران } (s)$$

عندما $s = 3, 5, 6, 3-$



المهندس
الحل: $(s) = (3) = 9$

$$(s) = (5) = 1 + (5) \times 2 = 11$$

$$(s) = (3) = 1 + (3) \times 2 = 7$$

$$(s) = (3-) = 9$$

